第７講　場合の数・確率

1　外観上区別のつかない N 個 $(N \geqq 3)$ の袋が並んでいて，k 番目 $(k = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N)$ の袋には赤球 k 個と白球 $N-k$ 個が入っている．これらの袋を混ぜ合わせたのち，任意に１つの袋を選定し，選ばれた袋から１球ずつ順に球を取り出す試行について，次の確率を求めよ．

(1)　取り出された球をもとの袋に戻す試行の場合，２回目まで続けて赤球が出る確率．

(2)　取り出された球をもとの袋に戻さない試行の場合，３回目に赤球が出る確率．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

2　コインを n 回投げて表が出た回数を X_n とする．X_n が 3 の倍数となる確率を p_n，3 で割って 2 余る確率を q_n とする．次の問いに答えよ．

(1)　p_1，p_2，q_1，q_2 を求めよ．

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n，q_nを p_{n-1}，q_{n-1} で表せ．

(3)　$n \geqq 4$ のとき，p_n を p_{n-3} で表せ．

(4)　$k \geqq 1$ のとき，p_{3k}，p_{3k+1}，p_{3k+2} をそれぞれ k を用いて表せ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

3 袋の中に赤球が a 個，白球が b 個入っている．この袋から無作為に1個の球を取り出し，その色を記録して袋に戻す．この試行をくり返し，同じ色の球が2回続けて出るか，または試行の回数が $2N$ に達したとき，試行を止める．ただし，N は2以上の一定の自然数とする．この試行がちょうど k 回で終わる確率を P_k $(k=1,\ 2,\cdots\cdots,\ 2N)$ とし，$p=\dfrac{a}{a+b}$，$q=\dfrac{b}{a+b}$，$r=pq$ とおく．

(1) P_{2l}，P_{2l+1} $(l=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N-1)$ および P_{2N} を r を用いて表せ．

(2) 試行の回数の期待値 E は，定数 A，B を用いて $E=\mathrm{A}+\mathrm{B}(r+r^2+\cdots\cdots+r^{N-1})$ と表されることを示し，A，B を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

第７講　場合の数・確率

1　外観上区別のつかない N 個 $(N \geqq 3)$ の袋が並んでいて，k 番目 $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N)$ の袋には赤球 k 個と白球 $N-k$ 個 が入っている．これらの袋を混ぜ合わせたのち，任意に１つの袋を選定し，選ばれた袋から１球ずつ順に球を取り出す試行について，次の確率を求めよ．

(1)　取り出された球をもとの袋に戻す試行の場合，２回目まで続けて赤球が出る確率．

(2)　取り出された球をもとの袋に戻さない試行の場合，３回目に赤球が出る確率．

(1)　k 番目の袋を選ぶ確率は $\dfrac{1}{N}$，選んだ袋において１回ごとに赤球が出る確率は $\dfrac{k}{N}$

よって，２回目まで赤球が出る確率は　$\dfrac{1}{N}\left(\dfrac{k}{N}\right)^2=\dfrac{1}{N^3}\cdot k^2$

ゆえに，求める確率は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{N^3}k^2=\frac{1}{N^3}\cdot\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)=\boldsymbol{\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{N}\right)\left(2+\frac{1}{N}\right)}$

(2)　３回目に赤球が出るのは，$k \geqq 3$ のときは，１回目から順に

・赤赤赤　　・赤白赤　　・白赤赤　　・白白赤　　と出る場合．　その確率 p は

$$\frac{k}{N}\cdot\frac{k-1}{N-1}\cdot\frac{k-2}{N-2}+\frac{k}{N}\cdot\frac{N-k}{N-1}\cdot\frac{k-1}{N-2}+\frac{N-k}{N}\cdot\frac{k}{N-1}\cdot\frac{k-1}{N-2}$$
$$+\frac{N-k}{N}\cdot\frac{N-k-1}{N-1}\cdot\frac{k}{N-2}=\frac{k}{N}$$

また，$k=1$ のときは　白白赤で $\dfrac{N-1}{N}\cdot\dfrac{N-2}{N-1}\cdot\dfrac{1}{N-2}=\dfrac{1}{N}$

$k=2$ のときは　赤白赤　白赤赤　白白赤で

$$\frac{2}{N}\cdot\frac{N-2}{N-1}\cdot\frac{1}{N-2}+\frac{N-2}{N}\cdot\frac{2}{N-1}\cdot\frac{1}{N-2}+\frac{N-2}{N}\cdot\frac{N-3}{N-1}\cdot\frac{2}{N-2}=\frac{2}{N}$$

よって　$k \geqq 1$ で $p=\dfrac{k}{N}$ である．

ゆえに，求める確率は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{N}\cdot\frac{k}{N}=\frac{1}{N^2}\cdot\frac{1}{2}N(N+1)=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{N}\right)}$

2　コインを n 回投げて表が出た回数を X_n とする．X_n が３の倍数となる確率を p_n，３で割って２余る確率を q_n とする．次の問いに答えよ．

(1)　p_1，p_2，q_1，q_2 を求めよ．

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n を p_{n-1}，q_{n-1} で表せ．

(3)　$n \geqq 4$ のとき，p_n を p_{n-3} で表せ．

(4)　$k \geqq 1$ のとき，p_{3k}，p_{3k+1}，p_{3k+2} をそれぞれ k を用いて表せ．

(1)　コインを１回投げたとき

表が出る回数が３の倍数，すなわち０回出る確率は $\dfrac{1}{2}$　　ゆえに $\boldsymbol{p_1=\dfrac{1}{2}}$

表が出る回数が (3 の倍数) $+2$ であることはない．　　ゆえに $\boldsymbol{q_1=0}$

コインを 2 回投げたとき

表が出る回数が 3 の倍数，すなわち表が 0 回裏が 2 回出る確率を考えて $p_2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

表が出る回数が (3 の倍数) $+2$，すなわち表が 2 回出る確率を考えて $q_2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

(2)　X_n を 3 で割って 1 余る確率は　$1-(p_n+q_n)$

$n\geqq 2$ のとき右図 1 より

$$\boldsymbol{p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{2}q_{n-1}}$$

同じく，右図 2 より

$$q_n=\frac{1}{2}q_{n-1}+\frac{1}{2}\{1-(p_{n-1}+q_{n-1})\}$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{2}}$$

図 1

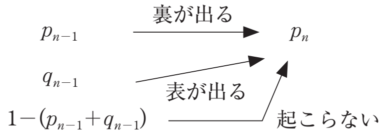
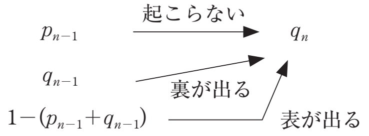


図 2



(3)　(2)より，$n\geqq 4$ のとき

$$p_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}p_{n-2}+\frac{1}{2}q_{n-2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}p_{n-2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}q_{n-2}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}p_{n-3}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}=\boldsymbol{-\frac{1}{8}p_{n-3}+\frac{3}{8}}$$

(4)　(3)より　$p_n-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{8}\left(p_{n-3}-\dfrac{1}{3}\right)$

$$p_3-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}p_2+\frac{1}{2}q_2-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}$$

ゆえに　$p_{3k}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{12}\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{k-1}=\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{8}\right)^k$

$p_1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$　　ゆえに　$p_{3k+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{8}\right)^k$

$p_2-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{12}$　　ゆえに　$p_{3k+2}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{12}\left(-\dfrac{1}{8}\right)^k$

よって　$\boldsymbol{p_{3k}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{8}\right)^k}$　　$\boldsymbol{p_{3k+1}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{8}\right)^k}$　　$\boldsymbol{p_{3k+2}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{12}\left(-\dfrac{1}{8}\right)^k}$

3　袋の中に赤球が a 個，白球が b 個入っている．この袋から無作為に 1 個の球を取り出し，その色を記録して袋に戻す．この試行をくり返し，同じ色の球が 2 回続けて出るか，または試行の回数が $2N$ に達したとき，試行を止める．ただし，N は 2 以上の一定の自然数とする．この試行がちょうど k 回で終わる確率を $P_k(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2N)$ とし，$p=\dfrac{a}{a+b}$，$q=\dfrac{b}{a+b}$，$r=pq$ とおく．

(1)　P_{2l}，$P_{2l+1}\,(l=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N-1)$，および P_{2N} を r を用いて表せ．

(2) 試行の回数の期待値 E は，定数 A，B を用いて $E=\mathrm{A}+\mathrm{B}(r+r^2+\cdots\cdots+r^{N-1})$ と表されることを示し，A，B を求めよ．

1 回の試行で赤球が出る確率は　$\dfrac{a}{a+b}=p$　　白球が出る確率は　$\dfrac{b}{a+b}=q$

(1) $2l$ 回目で終了するのは，$2l-2$ 回目まで赤と白が交互に出て，$2l-1$, $2l$ 回目だけ同色が連続するときである．

よって　$P_{2l}=(pq)^{l-1}\cdot p^2+(qp)^{l-1}\cdot q^2=(pq)^{l-1}(p^2+q^2)=\boldsymbol{r^{l-1}(1-2r)}$

$2l+1$ 回目で終了するのは $2l$ 回目まで赤と白が交互に出て，$2l+1$ 回目が $2l$ 回目と同色であるときである．

よって　$P_{2l+1}=(pq)^l\cdot q+(qp)^l\cdot p=(pq)^l(p+q)=\boldsymbol{r^l}$

$2N$回目で終了するのは

・すべて赤と白が交互にでる

・$2N-2$ 回目まで交互，$2N-1$，$2N$ 回目だけ同色が連続

のいずれかである．

よって　$P_{2N}=(pq)^N+(qp)^N+r^{N-1}(1-2r)=\boldsymbol{r^{N-1}}$

(2) $E=2\cdot P_2+3\cdot P_3+\cdots\cdots+2N\cdot P_{2N}$

$$=\sum_{k=2}^{2N}k\cdot P_k$$

$$=\sum_{l=1}^{N-1}\{2l\cdot P_{2l}+(2l+1)\cdot P_{2l+1}\}+2N\cdot P_{2N}$$

$$=\sum_{l=1}^{N-1}\{2l(r^{l-1}-2r^l)+(2l+1)\cdot r^l\}+2N\cdot r^{N-1}$$

$$=\sum_{l=1}^{N-1}\{2l\cdot r^{l-1}-(2l-1)\cdot r^l\}+2N\cdot r^{N-1}$$

$$=\{2+4r+\cdots\cdots+(2N-2)r^{N-2}\}$$
$$-\{r+3r^2+\cdots\cdots+(2N-5)r^{N-2}+(2N-3)r^{N-1}\}+2N\cdot r^{N-1}$$

$$=2+3(r+r^2+\cdots\cdots+r^{N-2}+r^{N-1})$$

ゆえに　**A＝2, B＝3**

第7講　場合の数・確率　練習問題

1　2つの袋があって，そのどちらにも赤球1つ，白球1つの計2個ずつの球が入っている．両方の袋から無作為に球を1つずつ取り出して入れ替える．この操作を n 回引き続いて行ったとき，はじめのように各袋に赤球と白球が1つずつ入っている確率を p_n とする．

(1)　$n \geqq 2$ として，p_{n-1} と p_n との関係式を求めよ．

(2)　p_n を求めよ．

2　表が出る確率が $p\,(0<p<1)$ のコイン３枚を同時に投げたとき，表と裏が出る事象を A，少なくとも１枚が表である事象を B とする．次の問いに答えよ．

(1)　事象 $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$，$\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ および $\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}$ の確率を求めよ．

(2)　$(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cup\left(\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}\right)$ は表と裏がどのように出る事象かを答え，その確率を求めよ．

(3)　表１枚につき k 点もらえるとする．得点の期待値が $6p$ のとき，k の値を求めよ．

第７講　場合の数・確率　　練習問題　解答

1　２つの袋があって，そのどちらにも赤球１つ，白球１つの計２個ずつの球が入っている．両方の袋から無作為に球を１つずつ取り出して入れ替える．この操作を n 回引き続いて行ったとき，はじめのように各袋に赤球と白球が１つずつ入っている確率を p_n とする．

(1)　$n \geqq 2$ として，p_{n-1} と p_n との関係式を求めよ．

(2)　p_n を求めよ．

解答例

(1)

> n 回目の操作ではじめの状態となるのは
> ・$n-1$ 回目の操作を行ってはじめの状態にあり，
> 　その次の操作で２つの袋の同色の球どうしを交換するとき
> ・$n-1$ 回目の操作を行ってそれぞれの袋に同色の球が入っているとき
> 　（次の操作後は必ずはじめの状態に戻る）
> のいずれか．

状態の遷移がわかる記述または図を描くとよい．

$$p_n = p_{n-1} \times \frac{1\cdot1+1\cdot1}{2^2} + (1-p_{n-1}) \times 1$$

ゆえに　$\boldsymbol{p_n = -\frac{1}{2}p_{n-1}+1}$

(2)　$p_0=1$ と考えることができる．

「はじめの状態」＝第「０」回目

(1)より　$p_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_{n-1}-\frac{2}{3}\right)$，$p_0 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

よって　$p_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

ゆえに　$p_n = \boldsymbol{\frac{1}{3}\left\{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$

2　表が出る確率が $p\,(0<p<1)$ のコイン３枚を同時に投げたとき，表と裏が出る事象をA，少なくとも１枚が表である事象をBとする．次の問いに答えよ．

(1)　事象 $A\cap B$，$A\cup B$ および $\overline{A}\cap B$ の確率を求めよ．

(2)　$(A\cap B)\cup(\overline{A\cup B})$ は表と裏がどのように出る事象かを答え，その確率を求めよ．

(3)　表１枚につき k 点もらえるとする．得点の期待値が $6p$ のとき，k の値を求めよ．

解答例

(1)　３枚のコインの表裏に関して

事象A：(２枚表，１枚裏)　または　(１枚表，２枚裏)

事象B：３枚表　または　(２枚表，１枚裏)　または　(１枚表，２枚裏)

である．

事象 $A\cap B$ は事象Aと等しい．

その確率は　${}_3C_2p^2(1-p)+{}_3C_1p(1-p)^2=\boldsymbol{3p(1-p)}$

事象 $A\cup B$ は事象Bと等しい．

その確率は　$1-(1-p)^3=p^3-3p^2+3p=\boldsymbol{p(p^2-3p+3)}$

事象 $\overline{A}\cap B$ は３枚表のとき．

その確率は　$\boldsymbol{p^3}$

(2)　$(A\cap B)\cup(\overline{A\cup B})$ は(1)より，$A\cup\overline{B}$ と等しい．つまり

(２枚表，１枚裏)　または　(１枚表，２枚裏)　または　３枚裏

のときであり，それは少なくとも１枚は裏が出ることである．

よって求める確率は　$\boldsymbol{1-p^3}$

(3)　r 枚表，$3-r$ 枚裏が出る確率は

${}_3C_rp^r(1-p)^{3-r}$ である．

よって，題意の期待値 E は

$$E=\sum_{r=0}^{3}rk\times{}_3C_rp^r(1-p)^{3-r}$$
$$=k\cdot{}_3C_1p(1-p)^2+2k\cdot{}_3C_2p^2(1-p)+3k\cdot p^3$$
$$=3kp$$

期待値の値を出すためにΣで立式することは，１つずつ値が変化する問題では有効である．Σの公式が利用できるときもある．

$E=6p$ となるのは　$\boldsymbol{k=2}$　のとき．